Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales I

Hoja nº 2 de problemas: autómatas a pila y lenguajes independientes del contexto

Marzo-2004

1. Decidir y demostrar si los siguientes lenguajes son regulares o no:
   a) $L=\{a^n b^l a^k \mid n+l+k>5\}$
   b) $L=\{a^n b^l a^k \mid n>5, l>3, k\geq l\}$
   c) $L=\{a^n b^l \mid n/l \text{ es entero}\}$
   d) $L=\{a^n b^l \mid n\leq l\leq 2n\}$
   e) $L=\{a^n b^l \mid n\leq 100, l\leq 100\}$
   f) $L=\{w_1 c w_2 \mid w_1,w_2\in(a+b)^*, w_1\neq w_2\}$
2. Probar que no son regulares los lenguajes siguientes:
   a) $L=\{w \mid \#_a w=\#_b w\}$
   b) La iteración indefinida del lenguaje anterior
   c) $L=\{a^n b^l a^k \mid k\geq n+l\}$
   d) $L=\{a^n b^l a^k \mid k=n+l\}$
   e) $L=\{a^n b^l a^k \mid n=l \text{ o } l=k\}$
   f) $L=\{a^n b^l \mid n\geq l\}$
   g) $L=\{ww \mid w\in(a+b)^*\}$
   h) $L=\{anbk \mid n>k\}\cup\{anbk \mid n=k-1\}$
3. Probar que no son regulares los lenguajes siguientes sobre el alfabeto $\Sigma=\{a\}$:
   a) $L=\{a^n \mid n \text{ primo}\}$
   b) $L=\{a^n \mid n=k^2 \text{ para algún } k\geq 0\}$
   c) $L=\{a^n \mid n=2^k \text{ para algún } k\geq 0\}$
   d) $L=\{a^n b^j \mid n\leq j^2\}$
   e) $L=\{a^n b^j \mid n\geq (j-1)^3\}$
   f) $L=\{a^n b^j c^k \mid k=jn\}$
   g) $L=\{a^n b^j c^k \mid k>n, k>j\}$
   h) $L=\{a^n b^j c^k \mid n\leq k\leq j\}$
   i) $L=\{w\in(a+b+c)^* \mid \#_a w<\#_b w<\#_c w\}$
   j) $L=\{w\in(a+b+c)^* \mid \#aw=\#bw.\#cw\}$
4. Hallar un autómata a pila que acepte cada uno de los siguientes lenguajes:
   a) $L=\{a^n b^n \mid n\geq 0\}\cup\{a\}$ (con menos de cuatro estados).
   b) $L=\{a^n b^{2n} \mid n\geq 0\}$
   c) $L=\{wcw^R \mid w\in(a+b)^*\}$
   d) $L=\{a^n b^m c^{n+m} \mid n\geq 0, m\geq 0\}$
   e) $L=\{a^n b^{n+m} c^m \mid n\geq 0, m\geq 1\}$
   f) $L=\{a^3 b^n c^n \mid n\geq 0\}$
   g) $L=\{a^n b^m \mid n\leq m\leq 3n\}$
   h) $L=\{w \mid \#_a w=\#_b w+1\}$
   i) $L=\{w \mid \#_a w=2\#_b w\}$
   j) $L=\{w \mid \#_a w+\#_b w=\#_c w\}$
   k) $L=\{w \mid 2\#_a w\leq \#_b w\leq 3\#_a w\}$
   l) $L=\{a^n b^m \mid n\geq 0, n\neq m\}$
   m) $L=\{w_1 c w_2 \mid w_1,w_2\in(a+b)^*, w_1\neq w_2^R\}$
   n) La concatenación de a* y el lenguaje del apartado anterior
   o) $L=\{ab(ab)^n b(ba)^n \mid n\geq 0\}$
   p) $L=\{w\in aa^*ba^*\}$ (con no más de dos estados internos)
   q) $L=\{anbn+1 \mid n\geq 0\}$
5. ¿Qué lenguaje acepta el autómata a pila con nodos {q0, q1, q2}, alfabeto {a, b}, alfabeto de pila {a, b, z}, nodo inicial q0, carácter inicial de pila z, y cuya función de transición está definida del modo siguiente?
   $f(q_0,a,z) = \{(q_1,a),(q_2,\lambda)\}$
   $f(q_1,b,a) = \{(q_1,b)\}$
   $f(q_1,b,b) = \{(q_1, b)\}$
   $f(q_1,a,b) = \{(q_2,\lambda)\}$
   (el resto de los valores de la función de transición son todos $\varnothing$).

6. ¿Qué lenguaje acepta el autómata a pila del ejercicio anterior si hay un nodo adicional, q3, y la función de transición está definida por los valores antes indicados y además, $f(qj,\lambda,\sigma)=\{(q3,\lambda)\}$ para j=0,1,2,3 y cualquier σ en el alfabeto de pila?

7. Demostrar que los siguientes lenguajes y sus complementarios son independientes del contexto, dando tanto una gramática independiente del contexto que los defina como un autómata a pila que los acepte:
   a) $\{a^n b^n \mid n \neq 0 \bmod 5\}$
   b) $\{w \in (a+b)^* \mid \#aw = \#bw$ y w no contiene ninguna subcadena de la forma aab$\}$

8. ¿Definen el mismo lenguaje las gramáticas definidas respectivamente mediante
   S ::= aSb | ab | λ y   S ::= aAb | ab, A ::= aAb | λ ? (S es el símbolo inicial en ambos casos).

9. ¿Qué lenguaje genera la gramática definida mediante las reglas S ::= SS | SSS | aSb | bSa | λ?

10. Demostrar que los siguientes lenguajes no son independientes del contexto:
    a) $\{a^n \mid n$ es primo$\}$;
    b) $\{a^n b^j \mid n \leq j^2\}$;
    c) $\{a^n b^j \mid n \geq (j-1)^3\}$;
    d) $\{a^n b^j c^k \mid k=jn\}$;
    e) $\{a^n b^j c^k \mid k>n, k>j\}$;
    f) $\{a^n b^j c^k \mid n \leq k \leq j\}$;
    g) $\{w \in (a+b+c)^* \mid \#_a w < \#_b w < \#_c w\}$;
    h) $\{w \in (a+b+c)^* \mid \#aw = \#bw.\#cw\}$.

11. Determinar si cada uno de los siguientes lenguajes es independiente del contexto:
    a) $\{a^n w w^R a^n \mid n \geq 0, w \in (a+b)^*\}$;
    b) $\{a^n b^j a^n b^j \mid n \geq 0, j \geq 0\}$;
    c) $\{a^n b^j a^j b^n \mid n \geq 0, j \geq 0\}$;
    d) $\{a^n b^n a^j b^j \mid n \geq 0, j \geq 0\}$;
    e) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n+j \leq k+l\}$;
    f) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n+k \leq j+l\}$;
    g) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n+l \leq j+k\}$;
    h) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n \leq j$ y $k \leq l\}$;
    i) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n \leq j$ o $k \leq l\}$;
    j) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n \leq k$ y $j \leq l\}$;
    k) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n \leq k$ o $j \leq l\}$;
    l) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n \leq l$ y $j \leq k\}$;
    m) $\{a^n b^j a^k b^l \mid n \leq l$ o $j \leq k\}$;
    n) $\{a^n b^n c^j \mid n \leq j\}$;
    o) $\{vcw \mid v, w \in (a+b)^*, v \neq w\}$;
    p) $\{amn \mid$ m y n son números primos$\}$.

12. Considérese el conjunto de todas las cadenas de caracteres que representan fracciones positivas y menores que la unidad cuyo numerador y denominador comienzan con cifras diferentes (suponemos que ambos están en base 3). Determinar si es un lenguaje regular. En caso afirmativo, dar una expresión regular y un autómata finito determinista para el mismo. En caso de que sea independiente del contexto, pero no regular, dar una gramática independiente del contexto y un autómata a pila para el mismo.

13. Decimos que una cadena de caracteres sobre el alfabeto $\Sigma = \{ [,], (,) \}$ es correcta si todos los paréntesis y corchetes que se abren se cierran después, y ningún paréntesis o corchete se cierra dejando dentro otro sin cerrar. a) Estudiar si el lenguaje formado por dichas cadenas de caracteres es independiente del contexto. En caso afirmativo, dar una gramática independiente del contexto y un autómata a pila para el mismo. b) Hacer lo mismo con el lenguaje correspondiente de expresiones correctas que además de corchetes y paréntesis incluyen llaves abiertas y cerradas ("{" y "}").